BAB IV
PERSAMAAN TINGKAT SATU DERAJAT TI NGGI
(1-n)

Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami cara-cara menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi.

Kompetensi Dasar

1. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi dengan menggunakan cara faktorisasi.
2. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi dengan menggunakan cara persamaan $y = f(x, p)$.
3. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi dengan menggunakan cara persamaan $x = f(y, p)$.
4. Mahasiswa dapat menentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi dengan menggunakan cara persamaan diferensial Clairut.

Bab IV buku ini membahas hal-hal pokok yang berkaitan dengan persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi, antara lain tentang (1) bentuk umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi, (2) cara menentukan selesaian persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi yang meliputi: cara faktorisasi, metode persamaan berbentuk $y = f(x, p)$, metode persamaan berbentuk $x = f(y, p)$ dan metode persamaan diferensial Clairut.

4.1 Bentuk Umum Persamaan Diferensial Tingkat Satu Derajat Tinggi

Persamaan tingkat satu derajat satu adalah persamaan yang ditulis dalam bentuk:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan dalam bentuk lain, yakni

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - f(x,y) = 0$$

Sehingga dalam bentuk yang paling sederhana persamaan diferensial tingkat satu derajat satu secara implisit dinyatakan dengan $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, Secara lengkap telah dibahas pada bab II. Dengan memisalkan $\frac{dy}{dx} = p$ maka bentuk umum persamaan diferensial tingkat satu drajat satu dapat dinyatakan secara implisit $f(x, y, p) = 0$. Jika p berpangkat lebih dari satu maka persamaannya dinamakan persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi atau persamaan tingkat satu derajat n.

Bentuk umum persamaan diferensial tingkat satu derajat-n dinyatakan dengan:

$$P_o(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + P_2(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + P_{n-1}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + P_n(x,y) = 0$$

dengan memisalkan $\frac{dy}{dx} = p$, maka bentuk di atas dapat dinyatakan dengan

$$P_o(x,y)p^n + P_1(x,y)p^{n-1} + P_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + P_{n-1}(x,y)p + P_n(x,y) = 0$$

atau secara implisit dinyatakan

$$\Leftrightarrow f\left(x, y, p, p^2, p^3, \ldots. p^{n-1}, p^n\right) = 0$$

Contoh:

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - (x+2y+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (x+2y+2xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ....(1-4)

   $\Leftrightarrow p^4 - (x+2y+1)p^3 + (x+2y+2xy)p^2 - 2xyp = 0$

2. $(xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + xy + y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 + xy) = 0$ ....(1-2)

$\Leftrightarrow (xy)p^2 - (x^2 + xy + y^2)p + (x^2 + xy) = 0$

3. $(x^2 + x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 + x - 2xy - y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y^2 - xy) = 0$ ......(1-2)

$\Leftrightarrow (x^2 + x)p^2 + (x^2 + x - 2xy - y)p + (y^2 -`xy) = 0$

4. $y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ ....(1-4)

$\Leftrightarrow y = 2p + x^2 p^4$

Persamaan tingkat satu derajat tinggi pada contoh di atas dapat ditentukan derajatnya. Persamaan pada contoh 1 dan 4 berderajat empat sedangkan contoh 2 dan 3 berderajat 2. Setelah ditentukan derajatnya, akhirnya dapat ditentukan selesaian umum persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi yang diketahui.

4.2 Selesaian Umum Persamaan Diferensial Tingkat Satu Derajat Tinggi

Persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi yang dinyatakan dalam bentuk $f\left(x, y, p, p^2, p^3, ...p^{n-1}, p^n\right) = 0$, selanjutnya dapat ditentukan selesaian umumnya setelah bentuk umum di atas dinyatakan dalam pemfaktoran yang paling sederhana. Bentuk pemfaktoran tersebut meliputi:

1) Cara faktorisasi persamaan
2) persamaan diselesaikan ke bentuk $y = f(x, p)$
3) persamaan diselesaikan ke bentuk $x = f(y, p)$
4) metode persamaan diferensial Clairut.

1. Menyelesaikan Persamaan dengan Cara Faktorisasi

Metode ini dilakukan dengan memandang bentuk persamaan diferensial linear tingkat derajat tinggi

$$P_o(x, y)p^n + P_1(x, y)p^{n-1} + P_2(x, y)p^{n-2} + ... + P_{n-1}(x, y)p + P_n(x, y) = 0$$

ruas kiri sebagai polinomial dalam p. Karena polinomial maka dapat diselesaikan ke dalam n faktor real yaitu berbeda.

$$P_o(x,y)p^n + P_1(x,y)p^{n-1} + P_2(x,y)p^{n-2} + ... + P_{n-1}(x,y)p + P_n(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - F_1)(p - F_2)(p - F_3).....(p - F_{n-1})(p - F_n) = 0$$

dimana F adalah fungsi dengan variabel x dan y.

Dari bentuk di atas diperoleh

$$(p - F_1) = 0, (p - F_2) = 0, (p - F_3) = 0,....., (p - F_{n-1}) = 0, (p - F_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = F_1(x,y), p = F_2(x,y), p = F_3(x,y),....p = F_{n-1}(x,y), p = F_n(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = F_1(x,y), \frac{dy}{dx} = F_2(x,y), \frac{dy}{dx} = F_3(x,y),....., \frac{dy}{dx} = F_{n-1}(x,y), \frac{dy}{dx} = F_n(x,y)$$

$$\Leftrightarrow f_1(x,y,c)\, f_2(x,y,c)\, f_3(x,y,c).......f_n(x,y,c)\, f_n(x,y,c) = 0$$

Sehingga selesaian umum persamaan diferensial linear

$$P_o(x,y)p^n + P_1(x,y)p^{n-1} + P_2(x,y)p^{n-2} + ... + P_{n-1}(x,y)p + P_n(x,y) = 0$$

adalah

$$f_1(x,y,c)\, f_2(x,y,c)\, f_3(x,y,c).......f_n(x,y,c)\, f_n(x,y,c) = 0$$

Setiap selesaian di atas dapat ditulis dalam bentuk yang bervariasi sebelum digabungkan dalam perkalian.

Perhatikan contoh-contoh dibawah ini

1.	Tentukan selesaian persamaan $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - (x+2y+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (x+2y+2xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ Jawab Nyatakan persamaan dalam bentuk polinomial p, didapat $\Leftrightarrow p^4 - (x+2y+1)p^3 + (x+2y+2xy)p^2 - 2xyp = 0$ $\Leftrightarrow p(p-1)(p-x)(p-2y) = 0$ $\Leftrightarrow p = 0, p = 1, p = x, p = 2y$ $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0, \frac{dy}{dx} = 1, \frac{dy}{dx} = x, \frac{dy}{dx} = 2y$

	Bentuk di atas, masing-masing adalah persamaan dengan variabel terpisah Selesaiannya $(y-c)=0,(y-x-c)=0,(2y-x^2-c),(y-ce^{2x})=0$ Sehingga selesaian umumnya $(y-c)=0,(y-x-c)=0,(2y-x^2-c),(y-ce^{2x})=0$ atau dapat dinyatakan dengan $(y-c)(y-x-c)(2y-x^2-c)(y-ce^{2x})=0$
2.	Tentukan selesaian persamaan $(xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+2y+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(x^2+xy)=0$ Jawab Nyatakan persamaan di atas dalam bentuk polinomial p, didapat: $(xy)p^2+(x+2y+1)p+(x^2+xy)=0$ $\Leftrightarrow (xp+x+y)(yp+x)=0$ Persamaan di atas dapat diselesaikan, dengan cara 1) $(xp+x+y)=0$ $\Leftrightarrow (x\frac{dy}{dx}+x+y)=0$ $\Leftrightarrow (x\frac{dy}{dx}+y)=-x$ $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-1$ (persamaan diferensial linear) Selesaiannya adalah $ye^{\int P(x)dx}=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}$ $yx=-\frac{1}{2}x^2+c \ atau \ 2xy+x^2+c=0$ 2) $(yp+x)=0$ $\Leftrightarrow (y\frac{dy}{dx}+x)=0$ (persamaan variabel terpisah) $\Leftrightarrow ydy+xdx=0$

	Selesaiannya $y^2 + x^2 - c = 0$ Berdasarkan selesaian 1) dan 2) diperoleh selesaian umum persamaan $(xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x+2y+1)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 + xy) = 0$ adalah $(2xy + x^2 + c)(y^2 + x^2 - c) = 0$
3.	Tentukan selesaian persamaan $(x^2 + x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 + x - 2xy - y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y^2 - xy) = 0$ Jawab Nyatakan persamaan di atas dalam bentuk polinomial, dan diperoleh: $(x^2 + x)p^2 + (x^2 + x - 2xy - y)p + (y^2 - xy) = 0$ $\Leftrightarrow ((x+1)p - y)(xp + x - y) = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)p - y) = 0, (xp + x - y) = 0$ Persamaan di atas, diselesaikan masing-masing 1) $(x+1)p - y) = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right) - y = 0$ (persamaan variabel terpisah) $\Leftrightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{(x+1)} = 0$ Selesaiannya adalah $\ln\|y\| - \ln\|x+1\| = c$ Atau $y - c(x+1) = 0$ 2) $xp + x - y = 0$ $\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} - y = -x$ $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -1$ (persamaan linear) Selesaiannya $ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$

	Diperoleh $y + x\ln cx = 0$ Berdasarkan selesaian 1) dan 2) diperoleh selesaian umum persamaan $(x^2+x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2+x-2xy-y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y^2-xy) = 0$ adalah $\left(y - c(x+1)\right)(y + x\ln cx) = 0$

2.Persamaan yang Dapat Diselesaikan ke $y = f(x,p)$

Persamaan

$$P_o(x,y)p^n + P_1(x,y)p^{n-1} + P_2(x,y)p^{n-2} + ... + P_{n-1}(x,y)p + P_n(x,y) = 0$$

diubah dalam bentuk $y = f(x,p)$

Turunkan y = f(x,p) terhadap variabel x didapat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$ (persaman diferensial tingkat satu derajat satu)

Diperoleh primitif $\phi(x,p,c) = 0$

Untuk mendapatkan primitif dilakukan dengan mengeliminasikan p diantara $y = f(x,p)$ dan $\phi(x,p,c) = 0$, apabila mungkin, atau nyatakan x dan y secara terpisah sebagai fungsi parameter p.

Contoh

1.	Tentukan selesaian persamaan $16x^2 + 2p^2y - p^3x = 0$ (PD Linear tingkat satu derajat tiga) Jawab $16x^2 + 2p^2y - p^3x = 0$ $\Leftrightarrow 2y = \frac{p^3x - 16x^2}{p^2}$

	$\Leftrightarrow 2y = px - 16\left(\dfrac{x^2}{p^2}\right)$ Dengan menurunkan persaman terhadap variabel x diperoleh $2\dfrac{dy}{dx} = \left(p + x\dfrac{dp}{dx}\right) - 16\left(\dfrac{2xp^2 - 2x^2 p\dfrac{dp}{dx}}{p^4}\right)$ $\Leftrightarrow 2p = \left(p + x\dfrac{dp}{dx}\right) - \dfrac{32x}{p^2} + \dfrac{32x^2}{p^3}\dfrac{dp}{dx}$ $\Leftrightarrow 2p^4 = \left(p^4 + xp^3\dfrac{dp}{dx}\right) - \left(32xp - 32x^2\dfrac{dp}{dx}\right)$ $\Leftrightarrow p(p^3 + 32x) - x(p^3 + 32x)\dfrac{dp}{dx} = 0$ $\Leftrightarrow \left(p^3 + 32x\right)\left(p - x\dfrac{dp}{dx}\right) = 0$ Persamaan ini dipenuhi jika (p^3+32x) = 0 atau $\left(p - x\dfrac{dp}{dx}\right) = 0$ Dari bentuk $\left(p - x\dfrac{dp}{dx}\right) = 0$ diperoleh $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$ dan p = Kx, K $\in R$ Substitusikan p = Kx ke persamaan $16x^2 + 2p^2 y - p^3 x = 0$ diperoleh $16x^2 + 2(Kx)y - (Kx)^3 x = 0$ atau $2 + c^2 y - c^3 x^2 = 0$ Dengan mengganti $K = 2c$ Faktor $p^3 + 32x = 0$ tidak diperhatikan, karena tidak memuat $\dfrac{dp}{dx}$.
2.	Tentukan selesaian persamaan $y = 2px + p^4 x^2$ Jawab Dengan menurunkan persamaan terhadap variabel x, diperoleh

	$\frac{dy}{dx} = 2\left(p + x\frac{dp}{dx}\right) + \left(2xp^4 + 4x^3p^2\frac{dp}{dx}\right)$ $\Leftrightarrow p = 2\left(p + x\frac{dp}{dx}\right) + \left(2xp^4 + 4x^3p^2\frac{dp}{dx}\right)$ $\Leftrightarrow \left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right) + \left(2xp^4 + 4x^3p^2\frac{dp}{dx}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)\left(1 + 2p^3x\right) = 0$ Faktor $\left(1 + 2p^3x\right) = 0$, diabaikan seperti contoh 1 di atas, dari persamaan $\left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right) = 0$ persamaan $\frac{dx}{x} + 2\frac{dp}{p} = 0$ diperoleh selesaian $xp^2 = c$. Pada bentuk parameter diperoleh $x = \frac{c}{p^2}$, $y = \frac{2c}{p} + c^2$. Hubungan yang terakhir didapat setelah $x = \frac{c}{p^2}$ disubstitusi ke persamaan $y = 2px + p^4x^2$.
3.	Tentukan selesaian persamaan $x = yp + p^2$ Jawab $\Leftrightarrow y = \frac{x}{p} - p$ Dengan menurunkan terhadap peubah x, diperoleh $\frac{dy}{dx} = y\frac{p - x\frac{dp}{dx}}{p^2} - \frac{dp}{dx}$ $\Leftrightarrow p^3 - p + (x + p^2)\frac{dp}{dx} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{p^3 - p} = - \frac{p}{p^2 - 1}$ (persamaan diferensial linear)

	Selesaiannya $xe^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ Diperoleh $\frac{x\sqrt{p^2-1}}{p} = -\int \frac{dp}{\sqrt{p^2-1}} = \ln\left\|p+\sqrt{p^2-1}\right\| + c$
4.	Tentukan selesaian persamaan $y = (2+p)x + p^2$ Jawab Turunkan persamaan terhadap x diperoleh $\frac{dy}{dx} = 2 + p + (x+2p)\frac{dp}{dx}$ $\Leftrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{2} = -p$ (persamaan diferensial linear) Selesaianya $xe^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ $\Leftrightarrow xe^{\frac{p}{2}} = -\int pe^{\frac{p}{2}}(x)dp = -2pe^{\frac{p}{2}} + 4e^{\frac{p}{2}} + c$ Dengan mensubstitusikan ke persamaan diperoleh $x = 2(2-p) + ce^{-\frac{p}{2}} + c, y = 8 - p^2 + (2+p)ce^{-\frac{p}{2}}$.

3. Persamaan yang dapat diselesaikan ke $x = f(y, p)$

Persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi yang berbentuk

$P_o(x,y)p^n + P_1(x,y)p^{n-1} + P_2(x,y)p^{n-2} + ... + P_{n-1}(x,y)p + P_n(x,y) = 0$

diubah dalam bentuk $x = f(y,p)$. Turunkan $x = f(y,p)$ terhadap variabel y didapat

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

$\Leftrightarrow F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$ (persaman diferensial tingkat satu derajat satu)

selesaian $\frac{1}{p} = F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$ untuk memperoleh primitif $\phi(x, p, c) = 0$

Untuk mendapatkan primitifnya dilakukan dengan mengeliminasikan p diantara $x = f(y, p)$ dan $\phi(x, p, c) = 0$ apabila mungkin, atau nyatakan x dan y secara terpisah sebagai fungsi parameter p .

Contoh

1	Tentukan selesaian persamaan $p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$ Jawab Persamaan dinyatakan dalam bentuk x = f(y,p) diperoleh $2x = \frac{p^2}{y} + \frac{4y}{p}$ Dengan menurunkan persamaan terhadap y diperoleh $2\frac{dx}{dy} = \frac{2p}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{y^2} + 4\left(\frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}\right)$ $2\frac{1}{p} = \left(\frac{2p}{y} - \frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy} + \left(\frac{4}{p} - \frac{p^2}{y^2}\right)$ $\Leftrightarrow \left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right)\left(2y^2 - p^3\right) = 0$ Integrasikan $\left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0$ dan elimasikan di antara $p^2 = Ky$ dan persamaan diferensial asal maka diperoleh $16y = K(K - 2x)^3$ dengan mengambil $K = 2c$
2	Tentukan selesaian persamaan $4x = py(p^2 - 3)$

	Jawab. Turunkan persamaan terhadap y diperoleh $4\frac{dx}{dy} = p(p^2-3)+3y(p^2-1)\frac{dp}{dy}$ $\Leftrightarrow \frac{4}{p} = p(p^2-3)+3y(p^2-1)\frac{dp}{dy}$ $\Leftrightarrow \frac{dy}{y}+\frac{3p(p^2-1)}{(p^2-4)(p^2+1)}dp = 0$ (PD variabel terpisah) Dengan cara yang sudah dibahas pada bab II diperoleh $\ln y+\frac{9}{10}\ln\|p-2\|+\frac{9}{10}\ln\|p-2\|+\frac{3}{5}\ln\|p^2+1\| = \ln c$ Maka $y = \frac{c}{(p^2-4)^{\frac{9}{10}}(p^2+1)^{\frac{3}{5}}}$ Substitusikan ke persamaan semula didapat $x = \frac{1}{4}\frac{cp(p^2-3)}{(p^2-4)^{\frac{9}{10}}(p^2+1)^{\frac{3}{5}}}$

4.Persamaan Diferensial Clairut

Menentukan selesaian persamaan diferensial tingkat satu derajat tinggi dengan metode persamaan diferensial Clairut adalah dengan cara mengubah persamaan semula menjadi bentuk $y = px + f(p)$. Bentuk ini dinamakan persamaan Clairut. Persamaan Clairut mempunyai selesaian $y = cx + f(c)$ yang diperoleh dengan cara sederhana yaitu dengan mengganti p dengan c pada persamaan yang diketahui.

Contoh

1.	Tentukan selesaian persamaan $y = px+\sqrt{4+p^2}$

	Selesaian umumnya adalah $y = cx + \sqrt{4 + c^2}$
2.	Tentukan selesaian persamaan $(y - px)^2 = 1 + p^2$ Jawab $(y - px)^2 = 1 + p^2$ $\Leftrightarrow y = px \pm \sqrt{1 + p^2}$ Selesaian umumnya $\Leftrightarrow (y - cx - \sqrt{1 + c^2})(y - cx + \sqrt{1 + c^2}) = 0$ $\Leftrightarrow (y - c)^2 = 1 + c^2$
3.	Tentukan selesaian persamaan $y = 3px + 6y^2 p^2$ Jawab Persamaan di atas dapat dibawa ke bentuk persamaan Clairut. Kalikan persamaan dengan y ^{2} diperoleh $y^3 = 3y^2 px + 6y^4 p^2$ Gunakan transformasi $v = y^3$ maka $\frac{dv}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$, sehingga $y^3 = 3y^2 px + 6y^4 p^2$ $\Leftrightarrow v = x\frac{dv}{dx} + \frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ Selesaian umumnya $v = Kx + \frac{2}{3}K^2$ $y^3 = Kx + \frac{2}{3}K^2$ $y^3 = 3cx + 6c^2$

4.3 Soal-soal

Tentukan selesaian umum persamaan di bawah ini

1) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

2) $xp^2 + (y - 1 - x^2)p - x(y - 1) = 0$

3) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$

4) $3xp^4 - xp - y = 0$

5) $8yp^2 - 2xp + y = 0$

6) $y^2p^2 + 3px - y = 0$

7) $p^2 - xp + y = 0$

8) $10y^3p^2 - 4xp + y = 0$

9) $xp^5 - yp^4 + (x^2 + 1)p^3 - 2xyp^2 + (x + y^2)p - y = 0$

10) $xp^2 - yp - y = 0$

11) $p^2 - xp - y = 0$

12) $y = (1 + p)x + p^2$

13) $y = 2p + \sqrt{1 + p^2}$

14) $yp^2 - xp + 3y = 0$